AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

İKİTƏRTİBLİ HİPERBOLİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BƏZİ TƏRS MƏSƏLƏLƏRİN OPTİMALLAŞDIRMA ÜSULLARI İLƏ TƏDQİQİ VƏ ONLARIN HƏLL ALQORİTMLƏRİ

İxtisas: 1203.01-Kompüter elmləri

Elm sahəsi: Riyaziyyat

İddiaçı: **Vüsalə Nazim qızı Nəsibzadə**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

BAKI -2021

Dissertasiya işi Sumqayıt Dövlət Universitetinin “İnformatika” kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Hamlet Fərman oğlu Quliyev

Rəsmi opponentlər: riyaziyyat elmləri doktoru
Yusif Soltan oğlu Qasımov

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent
Yeganə Ramiz qızı Əşrəfova

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru, dosent
Rəşad Oqtay oğlu Məstəliyev

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının AMEA İdarəetmə Sistemləri İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.19 Dissertasiya şurası

Dissertasiya şurasının sədri: f.-r.e.d., professor

_________________ **Qalina Yuriyevna Mehdiyeva**

Dissertasiya şurasının elmi katibi: f.-r.e.n., dosent

_________________ **Elxan Nəriman oğlu Səbziyev**

Elmi seminarın sədri: AMEA-nın müxbir üzvü, f.-r.e.d., professor

_________________ **Vaqif Rza oğlu İbrahimov**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. XX əsrin ortalarından başlayaraq tərs məsələlər fizikada, geofizikada, astronomiyada, tibbdə, biologiyada, ekologiyada, iqtisadiyyatda, ümumiyyətlə, riyazi üsulların tətbiq olunduğu elmin bütün sahələrində sistematik tədqiq və tətbiq obyektinə çevrildi.

Güclü kompüterlərin meydana gəlməsi ilə tərs məsələlərin tətbiq sahələri çoxlu elmi istiqamətləri əhatə etdi. Indiki dövrdə tərs məsələlər elmin intensiv inkişaf edən sahəsinə çevrilib və praktik olaraq riyaziyyatın bütün sferalarına, xüsusən də diferensial tənliklərə, riyazi fizikaya, hesablama riyaziyyatına və s. nüfuz edib. Qeyd edək ki, hər bir tərs məsələni bu və ya digər şəkildə müəyyən düz korrekt məsələyə tərs məsələ kimi ifadə etmək olar. Riyazi fizikada düz məsələlər dedikdə hər hansı proseslərin, hadisələrin və s.-in modelləşdirilməsi məsələləri başa düşülür. Ona görə də düz məsələlərdə müxtəlif fiziki hadisələri təsvir edən funksiyaların tapılmasına çalışırlar. Düz məsələləri həll etmək üçün verilənlər olaraq prosesin öyrənildiyi oblast, tənliyin əmsalları və sağ tərəfi, sərhəd şərtləri, başlanğıc şərtlər (proses stasionar olmayanda) götürülür. Lakin çox hallarda tənliyin sağ tərəfi (mənbə, xarici qüvvə), tədqiq olunan mühitin xassələri (tənliyin əmsalları), prosesin başlanğıc vəziyyəti (başlanğıc şərtlər), sərhəd rejimi (sərhəd şərtləri) naməlum olur. Onda tərs məsələlər meydana çıxır ki, belə ki, düz məsələnin həlli haqqında informasiyalara görə bu naməlum kəmiyyətləri təyin etmək tələb olunur. Beləliklə, tərs məsələdə baxılan sərhəd məsələsinin həlli ilə yanaşı, düz məsələyə daxil olan hər hansı funksiyalar da naməlum olur. Qeyd edək ki, tərs və korrekt olmayan məsələlərə A.S.Alekseyev, Y.E.Anikonov, B.Y.Arsenin, Ə.Y.Axundov, M.İ.Belişev, A.S.Blaqoveşenskiy, F.P.Vasilyev, V.V.Vasin, V.K.İvanov, K.T.İskakov, A.D.İskəndərov, S.İ.Kabanixin, A.İ.Kojanov, M.M.Lavrentyev, R.Lattes, J.L.Lions, V.A.Morozov, V.Q.Romanov, A.N.Tixonov, A.Q. Yaqola, V.Q.Yaxno, A.Həsənov və başqaları məşğul olmuşlar. Çox hallarda tərs məsələlər qeyri-korrekt olur və onların müxtəlif həll üsulları vardır: requlyarlaşdırma üsulu, kvazidönmə üsulu, kvazihəll üsulu, qradiyent üsulları və s. Son dövrlərdə xüsusi törəməli tənliklərin sağ tərəflərinin, başlanğıc və sərhəd funksiyalarının, əmsallarının təyini haqqında tərs məsələlər optimal idarəetmə məsələlərinə gətirilir və alınan məsələlər optimal idarəetmə nəzəriyyəsinin üsullarının köməyilə tədqiq olunur. Qeyd edək ki, riyazi fizikada tənlikləri üçün tərs məsələlər və belə tənliklər üçün optimal idarəetmə məsələləri arasında sıx əlaqə var. Tənliklərin axtarılan sağ tərəfləri, başlanğıc və sərhəd funksiyaları, əmsalları idarəedici rolunu oynayırlar və dəyər meyarı (funksional) əlavə şərtlərin köməyilə tərtib olunur. Bu funksionalı uyğunsuzluq funksionalı və ya məqsəd funksionalı adlandırırlar. Əgər məqsəd funksionalının minimum qiyməti sıfra bərabərdirsə, onda tərs məsələdə əlavə şərt (şərtlər) ödənir. Tərs məsələlərə belə yanaşma tərs məsələlərin variasional və ya optimallaşdırma həll üsulu adlanır. V.M.Abdullayev, K.R.Ayda-zadə, O.M.Alifanov, E.A.Artyuxin, K.T.İskakov, A.D.İskəndərov, S.İ.Kabanixin, A.L.Karçevski, H.F.Quliyev, S.V.Rumyansev, R.Q.Tağıyev, Q.Y.Yaqubov və başqalarının işlərində müxtəlif xüsusi törəməli tənliklər üçün müəyyən tərs məsələlərin variasional qoyuluşları tədqiq olunub. Variasional həll üsulu ilə parabolik tənliklər üçün müxtəlif məsələlər O.M.Alifanov, E.A.Artyuxin, S.V.Rumyansev, A.D.İskəndərov, R.Q.Tağıyev işlərində yaxşı tədqiq olunub. Bizə məlum olduğuna görə belə üsul hiperbolik tənliklər üçün az öyrənilib.

Nəhayət qeyd edək ki, xüsusi törəməli tənliklər üçün optimal idarəetmənin müxtəlif məsələləri ilə K.R.Ayda-zadə, J.L.P.Arman, S.S.Haxiyev, Q.T.Əhmədov, F.A.Əliyev, A.Q.Butkovski, F.P.Vasilyev, A.İ.Eqorov, Y.V.Eqorov, A.Z.İşmuxametov, K.Q.Həsənov, Y.S.Qasımov, A.D.İskəndərov, V.Komkov, H.F.Quliyev, J.L.Lions, K.A.Lurye, Ə.C.Məmmədov, K.B.Mənsimov, M.C.Mərdanov, T.Q.Məlikov, A.A.Niftiyev, V.İ.Plotnikov, U.E.Raytum, M.A.Sadıqov, S.Y.Serovayski, T.K.Sirazətdinov, V.İ.Sumin, M.İ.Sumin, R.Q.Tağıyev, M.H.Yaqubov, Q.Y.Yaqubov, Y.Ə.Şərifov, Ş.Ş.Yusubov, Z.İ.Xəlilov, M.V. Suryanarayana, J.Sokolowski, T.Zolezzi və başqaları məşğul olmuşlar.

Bu dissertasiyada ikitərtibli hiperbolik tənliklər üçün tənliklərin sağ tərəflərinin, başlanğıc və sərhəd funksiyalarının, əmsallarının tapılması haqqında bəzi tərs məsələlər optimal idarəetmə məsələlərinə gətirilir və alınan məsələlər optimal idarəetmə nəzəriyyəsi üsullarının köməyilə tədqiq olunur. Yuxarıda deyilənləri nəzərə alaraq hesab edirik ki, dissertasiya işinin mövzusu aktualdır.

Tədqiqatın obyekti və predmeti. Təqdim olunan dissertasiya işinin tədqiqat obyekti ikitərtibli hiperbolik tənliklər üçün sərhəd məsələləri, tərs məsələlər və optimal idarəetmə məsələləridir. Tədqiqatın predmeti isə tənliklərin sağ tərəfinin, başlanğıc, sərhəd funksiyalarının, əmsallarının optimal idarəetmə məsələsinə gətirməyə əsaslanan yanaşmalar və optimal idarəetmə məsələlərinin həll üsullarıdır.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri. İkitərtibli hiperbolik tənliklərin sağ tərəfinin, başlanğıc və sərhəd funksiyalarının, əmsallarının təyini haqqında müxtəlif tərs məsələlərin uyğun optimal idarəetmə məsələlərinə gətirmək, alınan məsələləri optimal idarəetmə nəzəriyyəsi üsullarının köməyilə tədqiq etmək, optimallıq şərtləri çıxarmaq və alınan optimallıq şərtlərinin köməyilə müəyyən məsələləri ədədi həll etmək.

Tədqiqatın metodları. Dissertasiya işində optimal idarəetmənin riyazi nəzəriyyəsinin və optimallaşdırmanın üsulları, riyazi fizikanın və funksional analizin üsulları tətbiq olunur.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar.

-ikitərtibli hiperbolik tip tənliklərin sağ tərəfinin, başlanğıc və sərhəd funksiyalarının təyini haqqında tərs məsələlərin optimal idarəetmə məsələsinə gətirilməsi;

-ikitərtibli hiperbolik tip xüsusi törəməli diferensial tənliklərin əmsallarının təyini haqqında tərs məsələlərin optimal idarəetmə məsələsinə gətirilməsi;

-alınan optimal idarəetmə məsələlərinin optimal idarəetmə nəzəriyyəsinin üsullarının köməyi ilə tədqiqi;

-optimal idarəetmə məsələlərində optimallıq şərtinin çıxarılması;

-optimallıq şərtlərinin köməyi ilə qoyulan məsələlərin həll alqoritmlərinin tərtib edilməsi.

Tədqiqatın elmi yeniliyi.

- ikitərtibli hiperbolik tənliklərin sağ tərəflərinin, başlanğıc və sərhəd funksiyalarının, əmsallarının təyini haqqında müxtəlif tərs məsələlər optimal idarəetmə məsələlərinə gətirilmişdir;

- alınan optimal idarəetmə məsələləri tədqiq olunmuşdur;

- məqsəd funksionalların diferensiallanan olması isbat olunub və onların qradiyentləri üçün ifadələr tapılıb;

-variasional bərabərsizliklər tipli optimallıq şərtləri çıxarılıb;

-çıxarılmış optimallıq şərtləri əsasında optimal idarəetmə məsələlərinin həll alqoritmləri təklif olunub.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki qiyməti. İşdə alınan nəticələr əsasən, nəzəri xarakter daşıyır.

Baxılan işdəki üsullar başqa xüsusi törəməli tənliklərlə təsvir olunan sistemlərdə yaxın tərs məsələləri tədqiq etmək üçün tətbiq oluna bilər. Işin praktik əhəmiyyəti ondan ibarətdir ki, alınan nəticələr rəqs və dalğa proseslərindəki müxtəlif tərs məsələlərin təqribi həlli üçün istifadə oluna bilər.

İşin aprobasiyası və tətbiqi. Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı elmi seminarlarda və konfranslarda məruzə olunub: на семинарнах кафедры “İnformatika” (rəhbər prof. V.A.Musatafayev) SDU, “Diferensial tənliklər və optimallaşdırma” (rəhbər prof. F.G.Feyziyev) SDU, “İdarəetmə nəzəriyyəsinin riyazi üsulları” (rəhbər prof. H.F.Quliyev) BDU, “Doktorantların və gənc tədqiqatçıların XX Respublika Elmi Konfransı”, (Bakı-2016), Ə.Ş.Həbibzadənin anadan olmasının 100-cü ildönümünə həsr olunmuş “Funksional analiz və onun tətbiqləri” adlı elmi konfrans, (Bakı-2016), “Riyaziyyatın tətbiqi məsələləri və yeni informasiya texnologiyaları”, III Respublika elmi konfransı (Sumqayıt-2016), на конференции “Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики” (Махачкала-2017), Sumqayıt Dövlət Universitetinin 55 illiyinə həsr olunmuş “Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri” adlı Beynəlxalq Elmi konfrans (Sumqayıt-2017), Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 94-cü ildönümünə həsr olunmuş “Təbiət və humanitar elm sahələrinin inkişafı problemləri” Respublika elmi konfransı (Lənkəran-2017), AMEA-nın muxbir uzvü, tanınmış alim və görkəmli riyaziyyatçı, fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor Qoşqar Teymur oğlu Əhmədovun anadan olmasının 100 illik yubileyinə həsr olunmuş “Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri” adlı Respublika elmi konfransı (Bakı-2017), AMEA, Akademik Akif Hacıyevin 80-illik yubileyinə həsr olunmuş “Riyaziyyat və mexanikanın müasir problemləri” adlı Beynəlxalq elmi konfrans (Bakı-2017), IV Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики» (Нальчик-2018), Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики, Материалы XIII Международной конференции, приуроченной к 55-летию факультета математики и компьютерных наук (Махачкала-2019), Riyaziyyatın fundamental problemləri və intellektual texnologiyaların təhsildə tətbiqi, Respublika Elmi konfransı (Sumqayıt-2020).

Müəllifin şəxsi töhvəsi. Alınan bütün nəticə və təkliflər müəllifə aiddir.

Müəllifin nəşrləri. Dissertasiyanın əsas nəticələri 22 işdə çap olunub, onların siyahısı avtoreferatın sonunda verilib.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi. Dissertasiyanın titul səhifəsi -486 işarədən, mündəricat -7009, giriş -24079, birinci fəsil -79200, ikinci fəsil -104026, üçüncü fəsil -25200, işin ümumi həcmi 240000 işarədən ibarətdir.

İŞİN QISA MƏZMUNU

Dissertasiya işi girişdən, üç fəsildən, nəticədən, istifadə olunan ədəbiyyat siyahısından və əlavədən ibarətdir.

Girişdə mövzunun aktuallığı əsaslandırılır, dissertasiyanın qısa məzmunu şərh olunur.

Birinci fəsil dörd paraqrafdan ibarət olub, ikitərtibli hiperbolik tənliklər üçün sağ tərəfin, başlanğıc və sərhəd funksiyaların təyini haqqında optimal idarəetmə məsələlərinə gətirilmiş tərs məsələlərin tədqiqinə həsr olunub.

1.1 paraqrafında $Q=\{(x,t) | 0<x<\ell, 0<t<T\}$ oblastında

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\upsilon(x,t) , \tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=u_1(x), 0\le x\le \ell, \tag{2}$$

$$u(0,t)=0, u(\ell,t)=0, 0\le t\le T \tag{3}$$

sərhəd məsələsinə baxılıb.

Burada $u_0\in \overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell), u_1\in L_2(0,\ell)-$ verilmiş funksiyalar, $\upsilon\in L_2(Q)$ isə naməlum funksiyadır. $\upsilon(x,t)$ funksiyasını təyin etmək üçün əlavə

$$u(d(t),t)= f(t), \ t\in(0,T), 0<d(t)<\ell \tag{4}$$

informasiyası verilir, burada $f(t)\in L_2(0,T)-$ verilmiş funksiya, $x=d(t), t\in[0,T]-$ verilmiş hissə-hissə hamar funksiyadır.

Bu məsələ aşağıdakı optimal idarəetmə məsələsinə gətirilir: (1)-(3) məsələsinin həlləri üzrə

$$J(\upsilon)=\frac{1}{2}\int_0^T[u(d(t),t;\upsilon)- f(t)]^2\,dt \tag{5}$$

funksionalını minimallaşdırmalı, burada $\upsilon(x,t)$ idarəedici adlandırılır, $u(x,t;\upsilon)-$ isə $\upsilon(x,t)$-ə uyğun (1)-(3) məsələsinin $W_{2,0}^1(Q)$ -dən olan həllidir[1].

---

[1]*Ладыженская, О.А. Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. - Москва: Наука, -1973.-408с.*

(5) funksionalına sıfır qiymət verən idarəedici tapılarsa, onda (4) əlavə şərti ödənilir.

İşdə əvvəlcə $\inf\limits_{\upsilon\in L_2(Q)} J(\upsilon)=0$ olduğu göstərilir. Sonra $V\subset L_2(Q)$ qabarıq qapalı çoxluğunda (1)-(3) məhdudiyyətləri daxilində

$$J_\beta(\upsilon)=J(\upsilon)+\frac{\beta}{2}\int\limits_Q \upsilon^2(x,t)dxdt, \quad (\beta=const>0) \tag{6}$$

funksionalının minimallaşdırılması məsələsinə baxılır.

Teorem 1. Fərz edək ki, (6), (1)-(3) məsələsinin verilənləri üzərinə yuxarda qoyulmuş şərtlər ödənilir. Onda (6) funksionalı V çoxluğunda Freşe mənada kəsilməz diferensiallanandır və onun $\upsilon\in V$ nöqtəsində $\delta\upsilon\in L_2(Q), \upsilon+\delta\upsilon\in V$ artımı üçün diferensialı

$$\langle J'(\upsilon,\delta\upsilon)\rangle=\int\limits_Q(\psi(x,t;\upsilon)+\beta\upsilon)\delta\upsilon dxdt$$

ifadəsi ilə təyin olunur, burada $\psi=\psi(x,t;\upsilon)$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0, (x,t)\in Q,$$

$$\psi(x,T)=0, \frac{\partial\psi(x,T)}{\partial t}=0, 0\le x\le\ell,$$

$$\psi(0,t)=0, \psi(\ell,t)=0,\ 0\le t\le T,$$

$$[\psi]_\Gamma=0, \left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_\Gamma=u(d(t),t;\upsilon)-f(t),\ 0\le t\le T$$

qoşma məsələsinin $W_{2,0}^1(Q)$ fəzasından olan həllidir, Γ xətti Q oblastını Q_1, Q_2 oblastlarına bölən $x=d(t), t\in[0,T]$ xəttidir, $[\omega]_\Gamma$ simvolu Q_1 və Q_2 oblastları tərəfindən $\Gamma-$yə yaxınlaşarkən $\omega(x,t)$-nin Γ üzrə L_2 mənada hesablanmış limit qiymətlərinin fərqini göstərir.

Aşağıdakı teorem (6), (1)-(3) məsələsinin həlli üçün optimallıq şərtini göstərir.

Teorem 2. Tutaq ki, (6), (1)-(3) məsələsinin verilənləri üzərinə qoyulmuş yuxardakı şərtlər ödənir. Onda (6), (1)-(3) məsələsində $\upsilon_*=\upsilon_*(x,t)\in V$ idarəedicisinin optimallığı üçün zəruri və kafi şərt

$$\int_Q (\psi_*(x,t)+\beta\upsilon_*(x,t))(\upsilon(x,t)-\upsilon_*(x,t))dxdt \geq 0, \quad \forall \upsilon \in V$$

bərabərsizliyinin ödənilməsidir, burada $\psi_* = \psi_*(x,t) = \psi(x,t;\upsilon_*) - \upsilon = \upsilon_*$ üçün qoşma məsələnin həllidir.

Paraqrafın sonunda (6),(1)-(3) məsələsində minimallaşdırıcı ardıcıllığın tapılması üçün qradiyentin proyeksiyası üsulu təklif edilmişdir.

1.2 paraqrafında $(u(x,t),\upsilon(x)) \in W_{2,0}^1(Q)\times L_2(\Omega)$ cütünün tapılması üçün aşağıdakı məsələyə baxılmışdır:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Lu = f(x,t), (x,t) \in Q = \Omega \times (0,T), \tag{7}$$

$$u(x,0) = 0, \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \upsilon(x), x \in \Omega, u|_S = 0, \tag{8}$$

$$u(x,T) = \varphi(x), x \in \Omega \tag{9}$$

burada $\Omega \subset R^n$ oblastı Γ sərhədi hamar olan oblastdır, $Q = \Omega \times (0,T) -$ silindirdir, $S = \Gamma \times (0,T) - Q,$ silindirinin yan səthidir. $f \in L_2(Q)$, $u_0 \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega), \varphi \in L_2(\Omega)$ isə verilmiş funksiyalardır.

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_0(x,t)u$$

elliptiklik şərtini ödəyən hamar əmsallı diferensial ifadədir. (7)-(9) məsələsi aşağıdakı optimal idarəetmə məsələsinə gətirilir:

$$J_0(\upsilon) = \frac{1}{2}\int_\Omega [u(x,T;\upsilon) - \varphi(x)]^2 dx$$

funksionalını (7), (8) məsələsinin həlləri üzrə minimallaşdırmalı, burada $\upsilon(x) -$ idarəedici funksiya, $u(x,t;\upsilon)$ (7), (8) məsələsinin ona uyğun həllidir. İşdə əvvəlcə isbat olunur ki, $\inf_{\upsilon \in L_2(Q)} J(\upsilon) = 0.$

Sonra

$$J_\beta(\upsilon) = J_0(\upsilon) + \frac{\beta}{2}\int_\Omega \upsilon^2(x)dx \tag{10}$$

funksionalının $V \subset L_2(\Omega)$ qapalı qabarıq çoxluğunda (7), (8) məhdudiyyətləri daxilində minimum tapılması məsələsinə baxılır. (10), (7), (8) məsələsinə

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + L\psi = 0,\ (x,t) \in Q, \tag{11}$$

$$\psi(x,T) = 0, \frac{\partial \psi(x,T)}{\partial t} = u(x,T;\upsilon) - \varphi(x), x \in \Omega,\ \psi|_S = 0 \tag{12}$$

qoşma məsələsi daxil edilir.

Teorem 3. Tutaq ki, (10), (7), (8) məsələsinin verilənləri yuxarda qoyulan şərtləri ödəyir. Onda (10) funksionalı V çoxluğunda Freşe mənada kəsilməz diferensiallanandır və onun $\upsilon \in V$ nöqtəsində $\delta\upsilon \in L_2(\Omega), \upsilon + \delta\upsilon \in V$ artımı üçün diferensialı

$$\left\langle J'_\beta(\upsilon), \delta\upsilon \right\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega [-\psi(x,0;\upsilon) + \beta\upsilon(x)]\delta\upsilon(x)dx$$

ifadəsi ilə təyin olunur.

Teorem 4. Tutaq ki, teorem 3-ün şərtləri ödənilir. Onda $\upsilon_* = \upsilon_*(x) \in V$ (10), (7), (8) məsələsində optimallığı üçün zəruri və kafi şərt

$$\int_\Omega [-\psi_*(x,0) + \beta\upsilon_*(x)](\upsilon(x) - \upsilon_*(x))dx \ge 0,\ \forall \upsilon \in V$$

bərabərsizliyinin ödənməsidir, burada, $\psi_* = \psi_*(x,t) = \psi(x,t;\upsilon_*)$ funksiyası $\upsilon = \upsilon_*(x)$ üçün (11), (12) qoşma məsələsinin həllidir.

Paraqrafın sonunda (10), (7), (8) məsələsində minimallaşdırıcı ardıcıllığın tapılması üçün qradiyentin proyeksiyası üsulu verilir.

1.3 paraqrafında ikiölçülü halda dalğa tənliyi üçün

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\ (x,y,t) \in Q = \Omega \times (0,T), \tag{13}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = f_1(x,y), \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=T} = f_2(x,y), (x,y) \in \Omega, \tag{14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\ell} = 0,\ (y,t) \in (0,\ell) \times (0,T), \tag{15}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\ell} = 0,\ (x,t) \in (0,\ell) \times (0,T) \tag{16}$$

Neyman məsələsinə baxılır, burada $\Omega = (0,\ell)\times(0,\ell), \ell > 0, T > 0 -$ verilmiş ədədlər, $f_1, f_2 \in W_2^1(\Omega)$-verilmiş funksiyalardır. Məlumdur ki, hiperbolik tənlik üçün Neyman məsələsi qeyri-korrektdir[2]. Tərs məsələ ondan ibarətdir ki, (13), (15), (16) və

$$\begin{aligned} &u|_{t=0} = \upsilon(x,y), \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = f_1(x,y), \\ &\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=T} = f_2(x,y), (x,y)\in\Omega \end{aligned} \tag{17}$$

münasibətlərindən $u = u(x,y,t), \upsilon = \upsilon(x,y)$ təyin etməli, burada $f_1(x,y), f_2(x,y)$ verilmiş funksiyalardır. Bu məsələnin əvəzinə aşağıdakı məsələyə baxılır:

$$V = \left\{ \begin{aligned} &\upsilon(x,y) \big| \ \upsilon \in W_2^2(\Omega), \\ &\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\Big|_{x=\ell} = 0, \ \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\Big|_{y=\ell} = 0, \|\upsilon\|_{W_2^2(\Omega)} \le M \end{aligned} \right\}, \tag{18}$$

sinfindən elə $\upsilon(x,y)$ funksiyası tapmalı ki, o (13), (15), (16), (17) məsələsinin həlli ilə birlikdə

$$J(\upsilon) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\frac{\partial u(x,y,T;\upsilon)}{\partial t} - f_2(x,y) \right]^2 dxdy \tag{19}$$

funksionalına minimum versin.

İşdə $\ell = \pi$ olduqda tərs məsələnin həllinin yeganəliyi, sonra (13), (15)-(18), (19) məsələsinin həll olunması haqqında teorem isbat edilir.

Sonra (19) funksionalının diferensialllanması isbat edilir.

Teorem 5. Tutaq ki, (13), (15)-(18), (19) məsələsinin verilənləri yuxardakı şərtləri ödəyir.

Onda (19) funksionalı V çoxluğunda Freşe mənada kəsilməz diferensiallanandır və onun diferensialı $\upsilon \in V$ nöqtəsində $\delta\upsilon \in W_2^2(\Omega), \upsilon + \delta\upsilon \in V$ artımı üçün

---

[2]Kabanikhin, S.I. An optimizition method in the Dirichlet problem for the wave equation/ Bektemesov M.A., Nurseitov D.B., Krivorotko O.I. and Alimova A.N.// Journal Inverse III-Posed Problem, de Gruyter , 20(2012), -pp. 193-211.

$$\langle J'(\upsilon), \delta\upsilon\rangle = -\int_{\Omega} \frac{\partial \psi(x, y, 0; \upsilon)}{\partial t} \delta\upsilon(x, y) dxdy$$

ifadəsi ilə təyin olunur, burada $\psi(x, y, t; \upsilon)$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, (x, y, t) \in Q,$$

$$\psi|_{t=0} = \frac{\partial u(x, y, T; \upsilon)}{\partial t} - f_2(x, y), \ \frac{\partial \psi}{\partial t}|_{t=T} = 0, (x, y) \in \Omega,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial \psi}{\partial x}|_{x=\pi} = 0, \ (y, t) \in (0, \pi) \times (0, T),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}|_{y=0} = \frac{\partial \psi}{\partial y}|_{y=\pi} = 0, \ (x, t) \in (0, \pi) \times (0, T)$$

qoşma məsələsinin $W_2^1(Q)$ – dən olan həllidir.

Teorem 6. Tutaq ki, teorem 5-in şərtləri ödənir. Onda $\upsilon_* = \upsilon_*(x, y) \in V$ idarəedicisinin (13), (15)-(18), (19) məsələsində optimallığı üçün zəruri və kafi şərt

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \psi_*(x, y, 0)}{\partial t} (\upsilon(x, y) - \upsilon_*(x, y)) dxdy \le 0, \ \forall \upsilon \in V$$

bərabərsizliyinin ödənməsidir, burada $\psi_*(x, y, t) = \psi(x, y, t; \upsilon_*)$ $\upsilon = \upsilon_*(x, y)$ üçün qoşma məsələnin həllidir.

1.4 paraqrafında

$(u(x_1, x_2, t), \upsilon(x_2, t)) \in W_2^1(Q) \times L_2((0, \ell_2) \times (0, T))$ funksiyalarının

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + f(x_1, x_2, t), \quad (x_1, x_2, t) \in Q, \tag{20}$$

$$u(x_1, x_2, 0) = \varphi_0(x_1, x_2), \ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x_1, x_2), \ (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{21}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}|_{x_1=0} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial x_1}|_{x_1=\ell_1} = \upsilon(x_2, t), \ (x_2, t) \in (0, \ell_2) \times (0, T), \tag{22}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}|_{x_2=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial x_2}|_{x_2=\ell_2} = 0, \ (x_1, t) \in (0, \ell_1) \times (0, T), \tag{23}$$

$$u|_{x_1=0} = a(x_2, t), \ (x_2, t) \in (0, \ell_2) \times (0, T) \tag{24}$$

münasibətlərindən təyin olunması məsələsinə baxılır, burada $Q=\Omega\times(0,T)$ – paralelepiped, $\Omega=\{0<x_1<\ell_1, 0<x_2<\ell_2\}$ – düzbucaqlıdır, ℓ_1, ℓ_2, T – verilmiş müsbət ədədlərdir, $f\in L_2(Q), \varphi_0\in W_2^1(\Omega)$, $\varphi_1\in L_2(\Omega), a\in L_2((0,\ell_2)\times(0,T))$ – verilmiş funksiyalardır.

Bu məsələ aşağıdakı optimal idarəetmə məsələsinə gətirilir:

$$J_0(\upsilon)=\frac{1}{2}\int_0^{\ell_2}\int_0^T[u(0,x_2,t;\upsilon)-a(x_2,t)]^2dtdx_2$$

funksionalını (20)-(23) məhdudiyyətləri daxilində minimallaşdırmalı. Əvvəlcə göstərilir $\inf J_0(\upsilon)=0,\ \upsilon\in L_2((0,\ell)\times(0,T))$.

Sonra $V\subset L_2((0,\ell)\times(0,T))$ qapalı, qabarıq çoxluğunda

$$J_\beta(\upsilon)=J_0(\upsilon)+\frac{\beta}{2}\int_0^{\ell_2}\int_0^T\upsilon^2dx_2dt \tag{25}$$

funksionalının diferensiallanan olması və aşağıdakı teorem isbat edilir.

Teorem 7. Tutaq ki, (20)-(23), (25) məsələsinin verilənləri yuxardakı şərtləri ödəyir. Onda $\upsilon_*(x_2,t)\in V$ idarəedicisinin (20)-(23), (25) məsələsində optimallığı üçün zəruri və kafi şərt

$$\int_0^{\ell_2}\int_0^T[\psi_*(\ell_1,x_2,t)+\beta\upsilon_*(x_2,t)](\upsilon(x_2,t)-\upsilon_*(x_2,t))dx_2dt\ge 0,\quad \forall\upsilon\in V$$

bərabərsizliyin ödənməsidir, burada $\psi_*(x_1,x_2,t)=\psi(x_1,x_2,t;\upsilon_*)$ funksiyası $\upsilon=\upsilon_*(x_2,t)$ üçün

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2},\ (x_1,x_2,t)\in Q,$$

$$\psi|_{t=T}=0,\ \frac{\partial\psi}{\partial t}|_{t=T}=0,\ (x,x_2)\in\Omega,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}|_{x_1=0}=-[u(0,x_2,t;\upsilon)-a(x_2,t)],\frac{\partial\psi}{\partial x_1}|_{x_1=\ell_1}=0,(x_2,t)\in(0,\ell_2)\times(0,T),$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_2}|_{x_2=0}=0,\frac{\partial\psi}{\partial x_2}|_{x_2=\ell_2}=0,\ (x_1,t)\in(0,\ell_1)\times(0,T)$$

qoşma məsələsinin həllidir.

Altı paraqrafdan ibarət olan ikinci fəsil, ikitərtibli hiperbolik tənliklər üçün qarışıq məsələdə əmsalların təyini haqqında məsələlərin tədqiqinə həsr olunub.

2.1 paraqrafında əlavə inteqral şərtli simin rəqsləri tənliyi üçün baş əmsalın təyini haqqında məsələyə baxılır: aşağıdakı münasibətlərdən

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\upsilon(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)=f(x,t),(x,t)\in Q=\{(x,t):0<x<\ell,0,<t<T\}, \tag{26}$$

$$u(x,0)=\varphi_0(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\varphi_1(x),\quad 0\le x\le \ell, \tag{27}$$

$$u(0,t)=0,\ u(\ell,t)=0,\quad 0\le t\le T, \tag{28}$$

$$\int_0^\ell K(x,t)u(x,t)dx=\chi(t),\ 0\le t\le T, \tag{29}$$

$$\upsilon=\upsilon(x,t)\in V=\left\{\begin{array}{l}\upsilon=\upsilon(x,t)\in W_p^1(Q):0<\nu\le\upsilon(x,t)\le\mu,\\ \left|\dfrac{\partial\upsilon(x,t)}{\partial x}\right|\le\mu_1,\ \left|\dfrac{\partial\upsilon(x,t)}{\partial t}\right|\le\mu_2\\ s.h.y.\ Q,\infty>p>2\end{array}\right\} \tag{30}$$

$\{u(x,t),\upsilon(x,t)\}$ cütünü tapmaq tələb olunur, burada $f\in L_2(Q)$, $\varphi_0\in \overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell),\varphi_1\in L_2(0,\ell)$, $K\in L_\infty(Q),\chi\in L_2(0,T)$-verilmiş funksiyalardır.

(26)-(30) məsələsinə aşağıdakı optimal idarəetmə məsələsi qarşı qoyulur:

$$J(\upsilon)=\frac{1}{2}\int_0^T\left[\int_0^\ell K(x,t)u(x,t;\upsilon)dx-\chi(t)\right]^2dt \tag{31}$$

funksionalını (26)-(28), (30) məhdudiyyətləri daxilində minimumunu tapmaq tələb olunur.

Belə teorem isbat olunur.

Teorem 8. Fərz edək ki, (26)-(30) məsələsinin verilənləri üzərinə qoyulmuş yuxarıdakı şərtlər ödənir. Onda (26)-(28), (30), (31) məsələsində $V_*=\{\upsilon_*\in V:J(\upsilon_*)=\inf_{\upsilon\in V}J(\upsilon)\}\ne\emptyset$, o, $W_p^1(Q)$ fəzasında zəif kompaktdır və (31) funksionalının ixtiyari $\{\upsilon^{(n)}\}\subset V$ minimallaşdırıcı ardıcıllığı $W_p^1(Q)$ fəzasında V_* çoxluğuna zəif yığılır. Sonra

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\upsilon(x,t)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=-K(x,t)\left[\int_0^\ell K(x,t)u(x,t;\upsilon)dx-\chi(t)\right],(x,t)\in Q, \quad (32)$$

$$\psi(x,T)=0,\ \frac{\partial\psi(x,T)}{\partial t}=0,\quad 0\le x\le\ell, \quad (33)$$

$$\psi(0,t)=0,\ \psi(\ell,t)=0, 0\le t\le T \quad (34)$$

qoşma məsələsi daxil edilir.

Teorem 9. Fərz edək ki, teoremin 8-in şərtləri ödənir və $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\in L_2(Q)$. Onda (31) funksionalı V çoxluğunda Freşe mənada kəsilməz diferensiallanandır və $\upsilon\in V$ nöqtəsində onun $\delta\upsilon\in W_\infty^1(Q),\upsilon+\delta\upsilon\in V$ artımlı diferensialı

$$\langle J'(\upsilon),\delta\upsilon\rangle=\int_Q\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}dxdt$$

ifadəsi ilə təyin olunur.

Bu düsturun əsasında aşağıdakı teorem isbat olunur:

Teorem 10. Fərz edək ki, teorem 9-un şərtləri ödənir. Onda (26)-(28), (30), (31) məsələsində $\upsilon_*=\upsilon_*(x,t)\in V$ idarəedicisinin optimallığı üçün zəruri şərt

$$\int_Q\frac{\partial u_*}{\partial x}\frac{\partial\psi_*}{\partial x}(\upsilon(x,t)-\upsilon_*(x,t))dxdt\ge 0\quad\forall\upsilon\in V,$$

bərabərsizliyinin ödənməsidir, burada $u_*=u(x,t;\upsilon_*)$, $\psi_*=\psi(x,t;\upsilon_*)-$(26)-(28) və (32)-(34) məsələlərinin $\upsilon=\upsilon_*(x,t)-$ yə uyğun həlləridir.

Sonra (31) funksionalının $J'(\upsilon)=\omega(x,t;\upsilon)$ şəklində qradiyenti hesablanır, burada $\omega(x,t;\upsilon)$ funksiyası

$$-\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}+\omega=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x},\ (x,t)\in Q,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}\Big|_{x=0}=\frac{\partial \omega}{\partial x}\Big|_{x=\ell}=0,\ 0\le t\le T,\ \frac{\partial \omega}{\partial t}\Big|_{t=0}=\frac{\partial \omega}{\partial t}\Big|_{t=T}=0,\ 0\le x\le \ell$$

məsələsinin həllidir.

(31) funksionalının qradiyentinin köməyi ilə optimallıq üçün variasional bərabərsizlik şəklində zəruri şərt çıxarılır.

2.2 paraqrafında əlavə şərt müəyyən xətt üzərində verildikdə simin rəqsləri tənliyinin baş əmsalının təyini haqqında məsələyə baxılır. 2.1 paraqrafındakına analoji nəticələr alınır.

2.3 paraqrafında simin rəqsləri tənliyi üçün Koşi məsələsində kiçik həddin əmsalının təyini haqqında məsələ optimal idarəetmə məsələsinə gətirilir. Gətirilmiş məsələdə optimal idarəedicinin varlığı və yeganəliyi haqqında teorem isbat edilmiş və variasional bərabərsizlik şəklində optimallıq üçün zəruri şərt çıxarılmışdır.

2.4 paraqrafında belə məsələ qoyulur:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u+\upsilon(t)\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,t),\quad (x,t)\in Q \tag{35}$$

tənliyi

$$u\big|_{t=0}=u_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=u_1(x), x\in\Omega,\quad u\big|_S=0, \tag{36}$$

$$\int_\Omega K(x,t)u(x,t)dx=g(t),\ \ t\in[0,T] \tag{37}$$

şərtlərindən $u(x,t)$ və $\upsilon(t)$ funksiyalarını tapmaq tələb olunur, burada $f(x,t), u_0(x), u_1(x), K(x,t), g(t)-$ verilmiş funksiyalar, $\Delta - x-$ə görə Laplas operatoru, Ω oblastı R^n-də Γ hamar sərhədli məhdud oblastdır, $Q=\Omega\times(0,T)-$ silindirdir, $S=\Gamma\times(0,T)-$ Q silindirin yan səthidir.

Baxılan məsələ

$$V=\left\{\begin{array}{l}\upsilon=\upsilon(t):\upsilon\in W_2^1[0,T], |\upsilon(t)|\le\mu_1, |\upsilon'(t)|\le\mu_2\\ {[0,T]}-da\, s.h.y.\end{array}\right\}, \tag{38}$$

($\mu_1>0, \mu_2>0-$ verilmiş ədədlərdir) çoxluğunda

$$J(\upsilon)=\frac{1}{2}\int_0^T\left(\int_\Omega K(x,t)u(x,t;\upsilon)dx-g(t)\right)^2 dt \tag{39}$$

funksionalının minimumun tapılması məsələsinə gətirilir.

Bu paraqrafda əvvəlcə (35), (36), (38), (39) məsələsində optimal idarəedicinin varlığı teoremi isbat edilir. Sonra (39) funksionalının diferensiallanması tədqiq olunur və optimallıq üçün

$$\int_0^T \left[\psi_{1*}(t)(\upsilon(t)-\upsilon_*(t)) + \frac{d\psi_{1*}(t)}{dt}\left(\frac{d\upsilon(t)}{dt} - \frac{d\upsilon_*(t)}{dt}\right)\right] dt \geq 0, \quad \forall \upsilon \in V,$$

şəklində zəruri şərt alınır, burada $\psi_{1*}(t) = \psi_1(t;\upsilon_*)$ funksiyası $\upsilon = \upsilon_*(t)$ üçün

$$-\frac{d^2\psi_1}{dt^2} + \psi_1 = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\psi dx, \ 0 \leq t \leq T,$$

$$\frac{d\psi_1}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d\psi_1}{dt}\Big|_{t=T} = 0$$

sərhəd məsələsinin həlli, $\psi = \psi(x,t;\upsilon) -$ isə

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \Delta\psi - \frac{\partial}{\partial t}(\upsilon\psi) = -K(x,t)\left(\int_\Omega K(x,\tau)u(x,\tau;\upsilon)dx - g(t)\right), (x,t) \in Q,$$

$$\psi(x,T) = 0, \frac{\partial\psi(x,T)}{\partial t} = 0, x \in \Omega, \ \psi|_S = 0$$

qoşma məsələnin həllidir.

2.5 paraqrafında aşağıdakı münasibətlərdən

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \upsilon(x)\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t), (x,t) \in Q \equiv (0,\ell)\times(0,T), \quad (40)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x), 0 \leq x \leq \ell, \quad (41)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\ell} = 0, 0 \leq t \leq T, \quad (42)$$

$$u(x,T) = g(x), 0 \leq x \leq \ell \quad (43)$$

$(u(x,t),\upsilon(x))$ cütünün tapılması məsələsinə baxılır.

Bu məsələ

$$J(\upsilon) = \frac{1}{2}\int_0^\ell [u(x,T;\upsilon) - g(x)]^2 dx \quad (44)$$

funksionalının

$$V=\left\{\begin{array}{l}\upsilon(x)\in \overset{0}{W}{}_2^1[0,\ell]:|\upsilon(x)|\le\mu_1,|\upsilon'(x)|\le\mu_2\\ [0,\ell]-da\,s.h.y.\end{array}\right\},\qquad(45)$$

sinfində (40)-(42) məhdudiyyətlər daxilində minimumnun tapılması məsələsinə gətirilir, burada $f\in L_2(Q)$, $u_0\in W_2^1[0,\ell]$, $u_1\in L_2(0,\ell)$, $g\in W_2^1[0,\ell]-$ verilmiş funksiyalar, $\mu_1>0$, $\mu_2>0-$ verilmiş ədədlərdir.

İşdə əvvəlcə optimal idarəedicinin varlıq teoremi isbat edilir. (44) funksionalı əvəzinə

$$I(\upsilon)=J(\upsilon)+\alpha\|\upsilon-\omega\|^2_{W_2^1[0,\ell]},\quad \alpha>0$$

funksionalı götürüldükdə optimal idarəedicinin varlıq və yeganəlik teoremi isbat edilir.

Teorem 11. Fərz edək ki, (40)-(42), (44), (45) məsələnin verilənləri üzərinə qoyulmuş yuxardakı şərtlər ödənir. Onda (44) funksionalı V çoxluğunda Freşe mənada kəsilməz diferensiallanandır və onun $\upsilon\in V$ nöqtəsində $\delta\upsilon\in\overset{0}{W}{}_2^1[0,\ell]$ artımlı diferensialı

$$\langle J'(\upsilon),\delta\upsilon\rangle=\int_Q\frac{\partial u}{\partial x}\psi\delta\upsilon dxdt$$

ifadəsi ilə təyin edilir.

Teorem 12. Fərz edək ki, 11 teoremi şərtləri ödənir. Onda (40)-(42), (44), (45) məsələsində $\upsilon_*(x)\in V$ idarəedicisinin optimallığı üçün zəruri şərt

$$\int_Q\frac{\partial u_*(x,t)}{\partial x}\psi_*(x,t)(\upsilon(x)-\upsilon_*(x))dxdt\ge 0,\ \forall\upsilon\in V$$

bərabərsizliyinin ödənməsidir, burada $u_*(x,t)=u(x,t;\upsilon_*)-$ (40)-(42) məsələsinin $\upsilon=\upsilon_*(x)$ üçün həlli, $\psi_*=\psi_*(x,t)=$ $=\psi(x,t;\upsilon_*)$ isə $\upsilon=\upsilon_*(x)$ üçün

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial x}(\upsilon\psi)=0,\ (x,t)\in Q,$$

$$\delta\psi\big|_{t=T}=0, \frac{\partial\psi}{\partial t}\big|_{t=T}=u(x,T;\upsilon)-g(x),\ \ 0\le x\le\ell,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\big|_{x=0}=0, \frac{\partial\psi}{\partial x}\big|_{x=\ell}=0,\ \ 0\le t\le T$$

qoşma məsələsinin həllidir.

Nəhayət, (44) funksionalının $J'(\upsilon)=\psi_1(x;\upsilon)$ şəklində qradiyenti hesablanılır, burada $\psi_1(x;\upsilon)$

$$-\frac{d^2\psi_1}{dt^2}+\psi_1=\int_0^T\frac{\partial u}{\partial t}\psi dx, \tag{46}$$

$$\frac{d\psi_1}{dt}\big|_{x=0}=\frac{d\psi_1}{dt}\big|_{x=\ell}=0 \tag{47}$$

məsələsinin həllidir.

Teorem 13. Fərz edək ki, 11 teoreminin şərtləri ödənilir. Onda (40)-(42), (44), (45) məsələsində optimallıq üçün zəruri şərt

$$\int_0^\ell\left[\psi_{1*}(x)(\upsilon(x)-\upsilon_*(x))+\frac{d\psi_{1*}(x)}{dx}\left(\frac{d\upsilon(x)}{dx}-\frac{d\upsilon_*(x)}{dx}\right)\right]dx\ge 0,\forall\,\upsilon\in V$$

bərabərsizliyinin ödənməsidir, burada $\psi_{1*}(x)=\psi_1(x;\upsilon_*)$ – (46), (47) məsələsinin $\upsilon=\upsilon_*(x)$ üçün həllidir.

Sonra qradiyentin proyeksiya üsulundan istifadə edərək (40)-(42), (44), (45) məsələsinin təqribi həllinin tapılmasına gətirilir.

2.6 paraqrafında

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\upsilon(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+a_0(x)u=f(x,t),(x,t)\in Q, \tag{48}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=u_1(x),x\in\Omega\ \ u\big|_S=0, \tag{49}$$

$$\int_0^T K(x,t)u(x,t)dt=\varphi(x),x\in\Omega\ , \tag{50}$$

$$\upsilon=\upsilon(x)\in V=\left\{\begin{array}{l}\upsilon(x)\in W_2^1(\Omega):\nu_0\le\upsilon(x)\le\mu_0,\\ \left|\dfrac{\partial\upsilon}{\partial x_i}\right|\le\mu_i, i=1,...,n\ \ \Omega-da\,s.h.y.\end{array}\right\} \tag{51}$$

münasibətlərindən $\{u(x,t),\upsilon(x)\}$ cütünün tapılması məsələsinə baxılıb, burada $a_0\in L_\infty(\Omega), f\in L_2(Q), u_0\in W_2^1(\Omega), u_1\in L_2(\Omega), K\in L_\infty(Q), \varphi\in L_2(\Omega)-$ verilmiş funksiyalar, $\nu_0, \mu_0, \mu_1,..., \mu_n$ – verilmiş müsbət ədədlər-dir.

(48)-(51) məsələsinə aşağıdakı optimal idarəetmə məsələsi qarşı qoyulur:

$$J(\upsilon)=\frac{1}{2}\int_\Omega\left[\int_0^T K(x,t)u(x,t;\upsilon)dt-\varphi(x)\right]^2 dx \tag{52}$$

funksionalının (48), (49), (51) şərtləri daxilində minimumu tapmalı. Əvvəlcə (48), (49), (51), (52) məsələsində optimal idarəedicinin varlığı teoremi isbat edilir

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\upsilon(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)+a_0\psi=\\&=-K(x,t)\left[\int_0^T K(x,\tau)u(x,\tau;\upsilon)d\tau-\varphi(x)\right],(x,t)\in Q,\end{aligned} \tag{53}$$

$$\psi(x,T)=0,\ \frac{\partial\psi(x,T)}{\partial t}=0,\ x\in\Omega,\ \psi|_S=0 \tag{54}$$

qoşma məsələsi daxil edilir.

Teorem 14. Fərz edək ki, (48), (49), (51), (52) məsələsinin verilənlər üzərinə yuxarda qoyulan şərtlər ödənilir və $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_i^2}\in L_2(Q),\quad i=1,...,n.$ Onda (52) funksionalı V çoxluğunda Freşe mənada kəsilməz diferensiallanandır və onun $\upsilon\in V$ nöqtəsində $\delta\upsilon\in W_\infty^1(\Omega)$ artımlı diferensialı

$$\langle J'(\upsilon), \delta\upsilon\rangle = \int_{\Omega}\left[\int_0^T \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_i} dt\right]\delta\upsilon(x)dx$$

ifadəsi ilə təyin olunur.

Teorem 15. Fərz edək ki, 14 teoremin şərtləri ödənilir. Onda (48), (49), (51), (52) məsələsində $\upsilon_* = \upsilon_*(x) \in V$ idarəedicisinin optimallığı üçün zəruri şərt

$$\int_{\Omega}\left[\int_0^T \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_*}{\partial x_i}\frac{\partial \psi_*}{\partial x_i} dt\right](\upsilon(x) - \upsilon_*(x))dx \geq 0, \quad \forall \upsilon \in V$$

bərabərsizliyinin ödənməsidir, burada $u_* = u(x,t;\upsilon_*)$ və $\psi_* = \psi(x,t;\upsilon_*) -$ (48), (49) və (53), (54) məsələlərinin $\upsilon = \upsilon_*(x) -$ ə uyğun həlləridir.

Dissertasiyanın üçüncü fəsli **üç paraqrafdan** ibarət olub birinci və ikinci fəsillərdə öyrənilən bəzi model məsələlərinin ədədi həllinə həsr olunub.

3.1 paraqrafında $(u(x,t), \upsilon(t))$ cütünün aşağıdakı münasibətlərindən ədədi həllərdən tapılması məsələsinə baxılıb[3]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \upsilon(t), \; (x,t) \in Q = (0,\ell) \times (0,T), \tag{55}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \; \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x), \; 0 \leq x \leq \ell, \tag{56}$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{57}$$

$$u(x_0,t) = p(t), \qquad 0 \leq t \leq T, \; 0 < x_0 < \ell,$$

burada $u_0(x), u_1(x), \; p(t) -$ verilmiş funksiyalardır. Bu məsələ

$$J_\beta(\upsilon) = \frac{1}{2}\int_0^T [u(x_0,t;\upsilon) - p(t)]^2 + \frac{\beta}{2}\int_0^T [\upsilon(t) - \omega(t)]^2 dt$$

funksionalının (55)-(57) məhdudiyyətləri daxilində

---

[3] Кулиев, Г.Ф., Насибзаде, В.Н. Обратная задача об определении правой части уравнения колебаний струны // -Bakı: Bakı Universitetinin xəbərləri, Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, -2016. №2, -s.19-28.

$$V=\left\{\upsilon(t)/\int_0^T \upsilon^2(t)dt\le r^2\right\},$$

sinfində minimum tapılması məsələsinə gətirilib, burada $\omega(t)-$ verilmiş funksiya, $r>0-$verilmiş ədəddir.

Qradiyentin proyeksiyası üsulunu tətbiq edərək bu məsələ ədədi həll edilir. Dissertasiyada ədədi eksperimentlərin nəticələri, qrafiklər, nəticələr verilir.

3.2 paraqrafında simin rəqsləri tənliyi üçün qarışıq məsələdə başlanğıc funksiyanın təyini haqqında aşağıdakı məsələ ədədi həll edilir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a_0(x,t)u+f(x,t);(x,t)\in Q\equiv(0,\ell)\times(0,T), \quad (58)$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\upsilon(x),\ 0\le x\le \ell, \quad (59)$$

$$u(0,t)=0,\ u(\ell,t)=0, \qquad 0\le t\le T, \quad (60)$$

$$u(x,T)=\varphi(x), \quad 0\le x\le \ell.$$

Bu məsələ

$$J_\beta(\upsilon)=\frac{1}{2}\int_0^\ell [u(x,T;\upsilon)-\varphi(x)]^2dx+\frac{\beta}{2}\int_0^\ell[\upsilon(x)-\omega(x)]^2dx$$

funksionalının (58)-(60) məhdudiyyətləri daxilində

$$V=\left\{\upsilon(x)/\int_0^\ell \upsilon^2(x)dx\le r^2\right\}$$

və ya

$$V=\{\upsilon(x)/|\upsilon(x)|\le M\}$$

sinfində minimumunun tapılması məsələsinə gətirilib, burada $\omega(x)-$verilmiş funksiya, r, $M-$ verilmiş müsbət ədədlərdir.

Qradiyentin proyeksiya üsulunu tətbiq edərək məsələ ədədi həll edilib[4]. Ədədi eksperimentin nəticələri dissertasiyada verilib.

---

[4] *Самарский, А.А., Лазаров, Р.Д., Макаров, В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями / А.А. Самарский, Р.Д. Лазаров, В.Л. Макаров, - Москва: Высшая школа, -1987, -296 с.*

Nəhayət **3.3 paraqrafında** akustikanın tərs məsələsində əmsalın təyinin ədədi həllinə baxılıb[5].

$(u(x,t),\upsilon(x))$ cütü

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\upsilon(x)\frac{\partial u}{\partial x}= f(x,t),\ (x,t)\in Q=(0,\ell)\times(0,T), \tag{61}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=u_1(x),\ 0\le x\le \ell, \tag{62}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0, \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\ell}=0, 0\le t\le T,$$

(63)

$$u(x,T)=g(x),\ \ 0\le x\le \ell$$

münasibətlərindən axtarılır, burada $f(x,t),u_0(x),u_1(x),g(x)-$ verilmiş funksiyalardır.

$$J(\upsilon)=\frac{1}{2}\int_0^\ell [u(x,T;\upsilon)-g(x)]^2 dx$$

funksionalı daxil edilir, bu funksionalın

$$V=\left\{\upsilon(x)\in \overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell)\middle|\ |\upsilon(x)|\le M\right\}$$

sinfində minimum axtarılır, burada *M*- müsbət ədəddir.

Yenə də qradiyentin proyeksiya üsulunu tətbiq edərək məsələ ədədi həll edilir. Sonra

$$J_\beta(\upsilon)=J(\upsilon)+\frac{\beta}{2}\int_0^\ell [\upsilon(x)-\omega(x)]^2 dx$$

funksionalı daxil edilir, (61)-(63) məhdudiyyətləri daxilində *V* sinfində bu funksionalın minimumunun tapılması məsələsinə baxılıb. Sonuncu məsələ də ədədi həll edilib. Ədədi eksperimentlərin nəticələri dissertasiyada göstərilib.

---

[5] *Кулиев, Г.Ф., Насибзаде, В.Н. Приведение обратной задачи акустики к задаче оптимального управления и её исследование // Вестник Томского Государственного Университета, математика и механика, -2018. №54, -с.5-16.*

Sonda elmi rəhbərim fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. H.F. Quliyevə məsələlərin qoyuluşuna və dissertasiya işinə diqqətinə görə dərin minnətdarlığımı bildirirəm.

NƏTİCƏ

Dissertasiyada ikitərtibli hiperbolik tənliklərin sağ tərəfinin, başlanğıc və sərhəd funksiyalarının, əmsallarının təyini haqqında müxtəlif tərs məsələlər uyğun optimal idarəetmə məsələlərinə gətirilib, alınan məsələlər optimal idarəetmə nəzəriyyəsi üsullarının köməyilə tədqiq edilib, optimallıq şərtləri çıxarılıb və alınan optimallıq şərtlərinin köməyilə məsələlərin həll alqoritmləri tərtib edilib.

İşdə aşağıdakı nəticələr alınmışdır:

- ✓ ikitərtibli hiperbolik tənliklərin sağ tərəflərinin, başlanğıc və sərhəd funksiyalarının, əmsallarının təyini haqqında müxtəlif tərs məsələlər optimal idarəetmə məsələlərinə gətirilmişdir;
- ✓ alınan optimal idarəetmə məsələləri tədqiq olunmuşdur;
- ✓ məqsəd funksionalların diferensiallanan olması isbat olunub və onların qradiyentləri üçün ifadələr tapılıb;
- ✓ variasional bərabərsizliklər tipli optimallıq şərtləri çıxarılıb;
- ✓ çıxarılmış optimallıq şərtləri əsasında optimal idarəetmə məsələlərinin həll alqoritmləri təklif olunub;
- ✓ üç halda ədədi eksperimentlər aparılıb.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı əsərlərdə çap olunmuşdur

1. Кулиев, Г.Ф., Насибзаде, В.Н. Обратная задача об определении правой части уравнения колебаний струны // Ə.Ş.Həbibzadənin anadan olmasının 100-cü ildönümünə həsr olunmuş "Funksional analiz və onun tətbiqləri" adlı elmi konfransı, -Bakı: -2016, -s.156-157.
2. Кулиев, Г.Ф., Насибзаде, В.Н. Обратная задача об определении правой части уравнения колебаний струны // -Bakı: Bakı Universitetinin xəbərləri, Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, -2016. №2, -s.19-28.
3. Кулиев, Г.Ф., Насибзаде, В.Н. Обратная задача нахождения коэффициента уравнения колебаний струны //-Sumqayıt: Sumqayıt Dövlət Universiteti, Elmi xəbərləri,Təbiət və texniki elmlər bölməsi, -2016. Cild 16, №4, -s.14-21.
4. Насибзаде, В.Н. Об обратной задаче нахождения старшего коэффициента уравнения колебаний струны // Doktorantların və gənc tədqiqatçıların XX Respublika Elmi Konfransının materialları, -Bakı: -2016, I cild, - s.42-44.
5. Насибзаде, В.Н. Об определении коэффициента при младшем члене в задаче Коши для уравнения колебаний струны // Azərbaycan Respublikasının dövlət müstəqilliyinin bərpasının 25-ci ildönümünə həsr olunur.Riyaziyyatın tətbiqi məsələləri və yeni informasiya texnologiyaları, III Respublika elmi konfransının materialları, -Sumqayıt: -2016, 15-16 dekabr, -s.94-95.
6. Насибзаде, В.Н. Обратная задача с дополнительным интегральным условием для уравнения колебаний струны // -Bakı: Bakı Universitetinin xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, -2016. № 4, -s.102-111.
7. Quliyev, H.F., Nəsibzadə, V.N. Dalğa tənliyi üçün Neyman məsələsində optimallaşdırma üsulu haqqında // Ümummilli

lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 94-cü ildönümünə həsr olunmuş “Təbiət və humanitar elm sahələrinin inkişafı problemləri” mövzusunda Respublika Elmi Konfransının materialları (5-6 may 2017-ci il), -Lənkəran: -2017, -s.25-26.
8. Quliyev, H.F., Nəsibzadə, V.N. Hiperbolik tənlik üçün başlanğıc şərtlərin tapılması məsələsinin optimal idarəetmə məsələsinə gətirilməsi // AMEA-nın muxbir uzvü, tanınmış alim və görkəmli riyaziyyatçı, fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor Qoşqar Teymur oğlu Əhmədovun anadan olmasının 100 illik yubileyinə həsr olunmuş “Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri” adlı Respublika elmi konfransı, -Bakı: 02-03 noyabr,-2017, -s.72-73.
9. Кулиев, Г.Ф., Насибзаде, В.Н. Обратная задача акустики и её исследование методами оптимального управления // Sumqayıt Dövlət Universitetinin 55 illiyinə həsr olunmuş Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri adlı Beynəlxalq Elmi konfransı, -Sumqayıt: -2017, -s.220-221.
10. Кулиев, Г.Ф., Насибзаде, В.Н. Об определении начальной функции в смешанной задаче для гиперболического уравнения второго порядка // -Bakı: Elmi əsərlər, Azərbaycan Texniki Universiteti, -2017. №2, -s.43-49.
11. Насибзаде, В.Н. Об определении начальной функции в смешанной задаче для гиперболического уравнения второго порядка // Sumqayıt Dövlət Universitetinin 55 illiyinə həsr olunmuş Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri adlı Beynəlxalq Elmi konfransı, -Sumqayıt, -2017, -s.236-237.
12. Guliyev, H.F., Nasibzade, V.N. On determination of initial function in mixed problem for a second order hyperbolic equation // Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики, XII Международная научная конференция. приуроченная к 85-летию профессора М.Г.Алишаева , -ДГУ, г.Махачкала: - 19-22 сентября, -2017,- с.70-73.

13. Насибзаде, В.Н. Об определении граничной функции для уравнения колебаний прямоугольной мембраны // Международный научно-технический журнал. Проблемы управления и информатики, -2017, -№ 3, -с.100-107.
14. Guliyev, H.F., Nasibzade, V.N. On determining the coefficient of a multi-dimensional hyperbolic equation with integral overdetermination condition // AMEA, Riyaziyyat və mexanikanın müasir problemləri.Akademik Akif Hacıyevin 80-illik yubileyinə həsr olunmuş Beynəlxalq konfransın materialları, -Bakı: -6-8 dekabr,- 2017,- s.83-84.
15. Guliyev, H.F., Nasibzadeh, V.N. On optimization method in the Neumann problem for wave equation // -Bulgaria: International Journal of Applied Mathematics, -2017. Volume 30, No.6, -p.515-526
16. Guliyev, H.F., Nasibzadeh, V.N. On determining the coefficient of a multi-dimensional hyperbolic equation with integral overdetermination condition // -Tbilisi, Georgia: Applied mathematics, informatics and mechanics, Vekua Institute of Applied Mathematics, -2017. vol.22 No.1, -p. 22-31.
17. Кулиев, Г.Ф., Насибзаде, В.Н. Вариационный метод решения обратной задачи об определении старшего коэффициента гиперболического уравнения второго порядка // -Bakı: Bakı Universitetinin xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, -2018. №1, -s.5-13.
18. Кулиев, Г.Ф., Насибзаде, В.Н. Приведение обратной задачи акустики к задаче оптимального управления и её исследование // Вестник Томского Государственного Университета, математика и механика, -2018. №54, -с.5-16.
19. Насибзаде, В.Н., Сафарова, З.Р. О численном решении задач по определению правой части, начальной функции и коэффициента уравнения колебания струны // IV Международная научная конференция. Актуальные

проблемы прикладной математики, -Нальчик: -2018, -с.193

20. Guliyev, H.F., Nasibzadeh, V.N. On determination of coefficient at lowest term in the Cauchy problem for string vibrations equation //-Baku: Journal of Contemporary Applied Mathematics, -2018. V. 8, No 1, -p. 9-18.
21. Кулиев, Г.Ф., Насибзаде, В.Н. Приведение обратной задачи с дополнительным интегральным условием для уравнения колебаний струны к задаче оптимального управления //Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики. Материалы XIII Международной конференции, приуроченной к 55-летию факультета математики и компьютерных наук, -Махачкала: -16–20 сентября,- 2019, -с.85-87.
22. Кулиев, Г.Ф., Насибзаде, В.Н. Об определении граничной функции для уравнения колебаний прямоугольной мембраны //Riyaziyyatın fundamental problemləri və intellektual texnologiyaların təhsildə tətbiqi, Respublika Elmi konfransının materialları, -Sumqayıt: -2020, -s.66-68.

Dissertasiyanın müdafiəsi 30 iyun 2021-ci il tarixdə saat 14.00 da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası İdarəetmə Sistemləri İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.19 Dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcək.

Ünvan: Az 1141, Bakı şəhəri, B. Vahabzadə küç., 9.

Dissertasiya ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası İdarəetmə Sistemləri İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq mümkündür.

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyaları rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat 26 may 2021-ci il tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 25.05.2021

Kağızın formatı: A5

Həcm: 40000

Tiraj:100